

«Геометрическая прогрессия в прикладных задачах»

***Открытый урок в 9 классе
преподаватель Реуцкая Г.М.***

2017 – 2018 учебный год

Тип и вид урока: обобщающий урок - семинар.

Цели урока:

1) образовательные:

- продолжить работу над определением геометрической прогрессии; формулами n -го члена, суммы n первых членов; характеристическим свойством, которым обладают члены прогрессии;
- убедиться, что раздел математики «Прогрессии» являются неотъемлемой частью общечеловеческой культуры;
- продолжать формировать навыки применения прогрессии к решению прикладных задач;
- обобщить и систематизировать знания учащихся по данной теме.

2) развивающие:

- продолжить дальнейшую работу по выработке умения сравнивать математические понятия, находить сходства и различия, умения наблюдать, подмечать закономерности;
- учиться проводить рассуждения по аналогии; формировать умение строить и интерпретировать математическую модель некоторой реальной ситуации.

3) воспитательные:

- содействовать воспитанию интереса к математике и ее приложениям, активности, умению общаться, аргументировано отстаивать свои взгляды.

Технология: ИКТ с элементами уровневой дифференциации и развивающего обучения.

Методы: проблемно поисковые, творческие, групповые, индивидуальные.

В начале урока класс делится (по жребии) на группы. На уроке «молодые учёные» - историки, теоретики, микробиологи и экономисты, которые готовили материал и задачи в своем направлении. Весь полученный материал проанализирован и синтезирован в текстовом носителе и в презентации.

Оборудование: компьютер, презентация, доклады, тесты, карточки с заданиями.

Ход урока:

1. Организационный момент: (слайд 1)

Урок подведения итогов нашей совместной работы начинаем с задачи.

Алена довольная пришла из школы и предложила папе заключить сделку:

в учебном году 34 недели;

за 1 неделю папа даст 1 тыин,

за вторую - 2 тыин,

за третью - 4 тыин и т.д.... Сколько денег получит Алена за 34 недели?

Как вы думаете, в каком классе учится Алена, и какую тему она изучила в школе? (слайд 2)

Напомните, что обозначает слово «прогрессия»? (слайд 3) Ответ: движение вперед.

Сегодня мы будем двигаться вперед и еще раз убедимся и убедим всех присутствующих в том, что... (слайд 4)

2. Актуализация знаний:

Любая работа начинается с правил, понятий и формул, которые помогают изучить тему, решать более сложные задания. Поэтому повторим основные правила темы: Закончи предложение:

1. геометрической прогрессией называется, ... (слайд 5)

3. Почему прогрессия называется геометрической? Свойство прогрессии? (слайд 6)

4. Вспомним основные формулы прогрессии, для этого

Проведём цифровой диктант «Как мы знаем формулы?» (слайд 7). Проверим числа ...

Рассмотрим ещё раз все изученные формулы прогрессий и сравним их (слайд 8)

Наш учёный – теоретик _____ анализировала и обобщала материал о прогрессиях, поэтому я обращаюсь в первую очередь к ней и ко всем с вопросами:

В чем состоит сходство между прогрессиями? А в чем есть отличия?

Прочитав определения арифметической и геометрической прогрессий можно обратить внимание на то, что они похожи. Зная формулу n -го члена арифметической прогрессии, можно получить формулу для геометрической прогрессии, если заменить сложение умножением и умножение – возведением в степень, (слайд 9)

(слайд 10) Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом,

называется $\frac{\text{арифметической}}{\text{геометрической}}$ прогрессией умноженному на одно и то же число,

(слайд 11) “Родство” прогрессий становится еще более заметным, если сравнить их характеристические свойства. Здесь тоже достаточно заменить сложение умножением, а деление на два – извлечением корня второй степени, и из характеристического свойства арифметической прогрессии получится характеристическое свойство геометрической прогрессии.

(слайд 12) Любой член $\frac{\text{арифметической}}{\text{геометрической}}$ прогрессии, начиная со второго, является

средним $\frac{\text{арифметическим}}{\text{геометрическим}}$ предшествующего и последующего членов.

3. Устная работа: (слайд 13. 14)

1) Дана геометрическая прогрессия. Укажите b_1 и q .

1) 1, 2, 4, 8...

2) 81, 27, 9, 3...

3) 1, -5, 25, -125...

4) 5, -1, $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{25}$...

2) Определите, какая последовательность является геометрической прогрессией

- 2; 5; 8; 11 ...
- 2; 1; 0,5; 0,25
- -2; -8; -32; -128 ...
- -2; -4; -6; -8; ...

3) Найдите знаменатель геометрической прогрессии

- $b_2 = 4; b_3 = 16$
- $b_3 = 16; b_4 = 4$
- $b_8 = 9; b_9 = -27$
- $b_9 = -27; b_{10} = 9$

4) Определите знаменатель геометрической прогрессии (a_n) , для которой $a_1 = 5$, $a_4 = -40$.

4. Практическая работа в группах (слайд 15)

1. В геометрической прогрессии $b_1 = -8$, $b_2 = -4$. Найдите q . $q = \frac{1}{2}$.

2. В геометрической прогрессии $b_1 = 2$, $q = -3$. Найдите первые пять членов прогрессии (2; -6; 18; -54; 162).

3. $\{b_n\}$ - геометрическая прогрессия. Найдите b_5 если $b_1 = 128$ и $q = \frac{1}{2}$ ($b_5 = 8$).

4. Найти неизвестные члены геометрической прогрессии: $b_1, b_2, 4, -8, \dots$ (1, -2, 4, -8).

5. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если $b_1 = 3$, $b_4 = 81$. ($q = 3$).

6. Представьте бесконечную десятичную периодическую дробь $0,(18)$ в виде обыкновенной дроби ($\frac{2}{11}$)

Самопроверка (слайд 16)

5. Немного истории. Теперь слово предоставим историкам, это _____. Они скажут несколько слов о появлении прогрессий и предложат нашему вниманию интересные исторические задачи на прогрессии. (слайд 17. 18)

- На связь между прогрессиями первым обратил внимание великий АРХИМЕД.
- Термин “прогрессия” был введен римским автором Бозцием (в 6 веке) и понимался в более широком смысле, как бесконечная числовая последовательность. Названия “арифметическая” и “геометрическая” были перенесены из теории непрерывных пропорций, которыми занимались древние греки.
- Формула суммы членов арифметической прогрессии была доказана древнегреческим ученым Диофантом (в 3 веке). Формула суммы членов геометрической прогрессии дана в книге Евклида “Начала”

(Слайд 19) Сегодня вам кажется, что знание геометрической прогрессий в жизни не нужно, но, к сожалению, это не так. Вот послушайте, в какое нелепое положение попал даже правитель государства, не знающий геометрическую прогрессию.

(Слайд 20) О том, как давно была известна геометрическая прогрессия, свидетельствует знаменитое предание о создании шахмат.

(Слайд 21) Шахматная игра была придумана в Индии, и когда индусский царь Шерам познакомился с ней, он был восхищен. Рассказывают, что Шерам рассмеялся, услышав, какую награду попросил у него изобретатель шахмат Сета:

за первую клетку шахматной доски – одно зерно, за вторую – два, за третью – четыре, за четвертую – восемь и так до 64-го поля.

(Слайд 220 **О, Мудрецы 9 класса, посоветуйтесь и скажите, стоит ли царю смеяться?**

Здесь явная геометрическая прогрессия 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... $S_{64} = ?$

(Слайд 23) Как велико это число? Кто может объяснить? Нужно найти сумму S_{64} .

$$S_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,704\,551\,615$$

(Слайд 24) Всего зерен 18 квинтиллионов 446 квадриллионов 744 триллиона 73 миллиарда 709 миллионов 551 тысяча 615.

(Слайд 25) Если бы царю удалось засеять пшеницей площадь всей поверхности Земли, считая и моря, и океаны, и горы, и пустыню, и Арктику с Антарктикой, и получить удовлетворительный урожай, то, пожалуй, лет за 5 он смог бы рассчитаться.

(Слайд 26) Индусский царь не в состоянии был выдать подобной награды. Но он мог бы легко, будь он силен в математике, освободиться от столь обременительного долга. Для этого нужно было лишь предложить изобретателю самому отсчитать себе зерно за зерном всю причитающуюся ему пшеницу.

Чтобы отсчитать миллион зерен, понадобилось бы не менее 10 суток неустанного счета.

Чтобы отсчитать себе все зерно изобретателю потребовалось бы примерно 586 549 402 017 лет.

(Слайд 27) **Еще одна интересная историческая задача носит имя «Задача о семи старухах».**

7 старух направляются в Рим,

каждая имеет 7 мулов,

каждый мул тащит 7 мешков,

в каждом мешке находится 7 хлебов,

у каждого хлеба лежит 7 ножей,

каждый нож нарежет 7 кусков хлеба. Чему равно общее число всего перечисленного?

(Слайд 28. 29) это геометрическая прогрессия, $b_1 = 7$ и $q = 7$.

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}. \quad S_6 = \frac{7(7^6 - 1)}{7 - 1} = \frac{7 \cdot (117649 - 1)}{6} = 137256.$$

Спасибо историкам за хорошие задачи. Пришла очередь микробиологов.

Микробиология — наука о живых организмах, невидимых невооруженным глазом: бактерии, археобактерии, микроскопические грибы и водоросли, часто этот список продолжают простейшими и вирусами. В область интересов микробиологии входит систематика микроорганизмов, их морфология, физиология, биохимия, эволюция, роль в экосистемах, а также возможности практического использования.

(Слайд 32) *Все организмы обладают интенсивностью размножения в геометрической прогрессии.* Самый поразительный пример прогрессии размножения даёт ... **ИНФУЗОРИЯ**, носящая название парамеции (туфелька).

Летом инфузории размножаются бесполым способом делением пополам.

Вопрос: сколько будет инфузорий после 15-го размножения?

(Слайд 33. 34) Решение: Имеем геометрическую прогрессию 1; 2; 4; 8; ...

$b_1 = 2$, $q=2$. Найти b_{15} =?

Ответ: $b_{15} = 2 \cdot 2^{14} = 32\,768$.

(Слайд 35) **бактерии...**

Способность к размножению у бактерий настолько велика, что если бы они не гибли от разных причин, а беспрерывно размножались, то за трое суток общая масса потомства одной только бактерии могла бы составить 7500 тонн. Таким громадным количеством бактерий можно было бы заполнить около 375 железнодорожных вагонов.

Спасибо биологам. Пришла очередь экономистам показать, чем они занимались в рамках нашей темы.

Изучая материалы, связанные с прогрессиями, мы нашли большое количество задач с экономическим содержанием. Например, задачи на **денежные вклады под проценты** — пример геометрической прогрессии.

(Слайд 36) Пусть вклад составляет 10 000 тг, банк дает 10% годовых, срок хранения вклада - 5 лет. Сколько денег получит вкладчик?

Составим математическую модель задачи.

Имеем ГП с первым членом $a_1 = 10000$ и знаменателем $q = 100\% + 10\% = 110\% = 1,1$.

Нужно найти a_6 .

К концу срока хранения Вы получите сумму, равную $a_6 = 10\,000 \cdot (1,1)^5 = 16\,105,1$ тг.

Спасибо экономистам.

Проведем проверочную работу в виде тестов:

группа I

- Первый член ГП равен 5, знаменатель – равен 3. Найти 4-ый член прогрессии.
А) 5; В) 25; С) 135;
- Чему может быть равен знаменатель ГП, если $b_{10} = 10$, а $b_{12} = 40$?
А) 2 В) 3 С) 5;
- Чему равна сумма первых пяти членов ГП, если $b_1=1$, а знаменатель равен 2?
А) 25 В) 31 С) 55;

4. Найти сумму бесконечной геометрической прогрессии 12; 6; ...
A.6. B.-12. C. 24. D.-24. E. 12.
5. Представьте бесконечную дробь $0,(6)$ в виде обыкновенной дроби.
A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{7}{9}$. C. $\frac{5}{9}$. D. $\frac{4}{9}$. E. $\frac{2}{3}$.

группа II

1. Первый член ГП равен 4, знаменатель – равен 3. Найти 5-ый член прогрессии.
A) 532; B) 324; C) 225;
2. Чему может быть равен знаменатель ГП, если $b_5=6$, а $b_7=54$.
A) 5; B) 3; C) 4;
3. Чему равна сумма первых четырех членов ГП, если $C_1=8$, а знаменатель равен 3?
A) 320; B) 160; C) 104;
4. Найти сумму бесконечной геометрической прогрессии 9; -3; 1; ...
A. 6,75. B. $-6\frac{4}{9}$. C. - 27. D. 81. E. $\frac{1}{3}$.
5. Представьте бесконечную дробь $2,(13)$ в виде обыкновенной дроби
A. $2\frac{3}{5}$. B. $2\frac{7}{9}$. C. $2\frac{13}{99}$. D. $2\frac{4}{9}$. E. $2\frac{2}{3}$.

группа III

1. Первый член ГП равен 2, знаменатель – равен 10. Найти 4-ый член прогрессии.
A) 20; B) 2000; C) 205;
2. Чему может быть равен знаменатель ГП, если $b_7=8$, а $b_9=72$?
A) 4; B) 9; C) 3;
3. Чему равна сумма первых шести членов ГП, если $d_1=3$, а знаменатель равен 2?
A) 189; B) 204; C) 245.
4. Найти сумму бесконечно убывающей ГП, если $b_1 = 2$; $q = 0,875$.
A. 18. B. 16. C. 32. D. 64. E. 100.
5. Представьте бесконечную дробь $0,(115)$ в виде обыкновенной дроби
A. $\frac{39}{599}$. B. $\frac{7}{999}$. C. $\frac{5}{99}$. D. $\frac{115}{999}$. E. $\frac{2}{3}$.

группа IV

1. Первый член ГП равен 6, знаменатель – равен 2. Найти 4-ый член прогрессии.
A) 64; B) 25; C) 48;
2. Чему может быть равен знаменатель ГП, если $b_6=2$, а $b_8=450$?
A) 30; B) 20; C) 15;
3. Чему равна сумма первых четырех членов ГП, если $v_1 = 4$, а знаменатель равен 3?
A) 180; B) 160; C) 205.
4. Найти сумму членов бесконечной геометрической прогрессии 8; 4; ...
A. 8. B. 12. C. 15. D. $\frac{255}{16}$. E. 16.
5. Представьте бесконечную дробь $0,(1)$ в виде обыкновенной дроби
A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{1}{9}$. C. $\frac{5}{9}$. D. $\frac{4}{9}$. E. $\frac{2}{9}$.

(Слайд 37) ПРОВЕРКА

Критерии оценок: «5» - решены все задания;

«4» - решены 4 задания;

«3» - 3 задания.

Кто решит – дополнительное задание:

1. В геометрической прогрессии $b_1 = 1,6$ $q = 2$. Найти b_5 . (25,6)
2. В геометрической прогрессии $b_1 = 3,2$; $q = \frac{1}{2}$. Найти b_4 . (0,4)
3. Найти сумму 4 членов Г.П., если $b_3 = \frac{1}{25}$; $b_4 = \frac{1}{125}$. ($q = \frac{1}{5}$, $b_1 = 1$, $S_4 = \frac{156}{125}$).
4. В ГП 8; 4; ... Найти S_5 . (15,5)
5. В ГП найти b_1 , если $q = \frac{2}{3}$, а $S_4 = 65$. (27)

6. Срочный вклад, положенный в сбербанк, ежегодно увеличивается на 3%. Каким он станет через 3 года, если вначале он был 50 000 тг. (54636,35)
7. Срочный вклад, положенный в сбербанк, ежегодно увеличивается на 3%. Каким он станет через 3 года, если вначале он был 9 000 тг (9835,43)
8. Даны четыре члена ГП. Сумма двух крайних членов равна 52, а двух средних 16. Найти эти числа. (0,8; 3,2; 12,8; 51,2 или наоборот, т.к. $q=4$ или $\frac{1}{4}$)
9. Разность между пятым и третьим членами ГП 144, а между четвертым и вторым равна 48. Найти сумму шести первых членов прогрессии. ($q=3$; $a_1=2$; $S_6=63$).

Нельзя показать все разнообразие задач по прогрессиям на одном уроке. Но я думаю, что вы убедились, задачи на прогрессии встречаются во многих сферах человеческой жизни. Прогрессии действительно везде вокруг нас. Хочу лишь добавить, с помощью прогрессий можно проводить вычисления результатов в спорте, в компьютерной игре, в финансовых пирамидах, решения химических, физических и геометрических задач. Прогрессии существуют даже в литературе! Кому интересно - можно получить задание и решать!

Вернёмся к задаче в начале урока. Сколько же денег получит Алёна? (Слайд 38)

$$\text{Алена должна получить } 2^{34}-1=171\,798\,691,83 \text{ тг}$$

6. **Рефлексия:** (слайд 39)

- Результатом своей личной работы считаю, что я ...
А. Разобрался в теории. В. Научился решать задачи. С. Повторил изученный материал.
- Что вам не хватало на уроке при решении задач?
А. Знаний. Б. Времени. С. Желания.
- Кто оказывал вам помощь в преодолении трудностей на уроке?
А. Одноклассники. Б. Учитель. С. Учебник. Д. Никто.

7. Д/З (слайд 40)

- повторить основные формулы геометрической прогрессии
- карточки с задачами (индивидуально).